On a : $U_1 = \sum_{k=1}^{1} 2^{-k!} = \frac{1}{2}$

On a : $\forall n \geq 1$, $U_n \geq U_1$ d'où $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$ et par suite $\frac{1}{2} \leq l < 1$.

Solution 14 :

1°/a) $f(x)-1 = \frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2-2x+1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1$ on a : $2x \geq 2$ d'où $2x-1 \geq 1$ d'où $\forall x \geq 1$ on a $f(x)-1 \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.

b) $f(x)-x = \frac{x^2}{2x-1} - x = \frac{x^2-x(2x-1)}{2x-1} = \frac{-x^2+x}{2x-1} = \frac{x(1-x)}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1$, $1-x \leq 0$ et $2x-1 > 0$ d'où $f(x)-x \leq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq x$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$.

pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 \geq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

On a $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \geq 1$ (d'après 1°/ a)) d'où $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$.

b) on a – d'après 1°/ b) – $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq x$.

On pose $x = u_n$ car $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \leq u_n$ d'où $u_{n+1} \leq u_n$ et par suite (u_n) est une suite décroissante.

c) on a : (u_n) est une suite décroissante minorée par 1 donc (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$ d'où $l \geq 1$.

On a : f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ donc f est continue en l car $l \neq \frac{1}{2}$

d'où $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2}{2l-1} = l \Leftrightarrow l^2 = 2l^2 - l \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l-1) = 0 \Leftrightarrow$

$l = 0$ ou $l = 1$. Or $l \geq 1$ d'où $l = 1$.

Conclusion : (u_n) est une suite convergente vers 1.